Séquence 8 – Calcul littéral

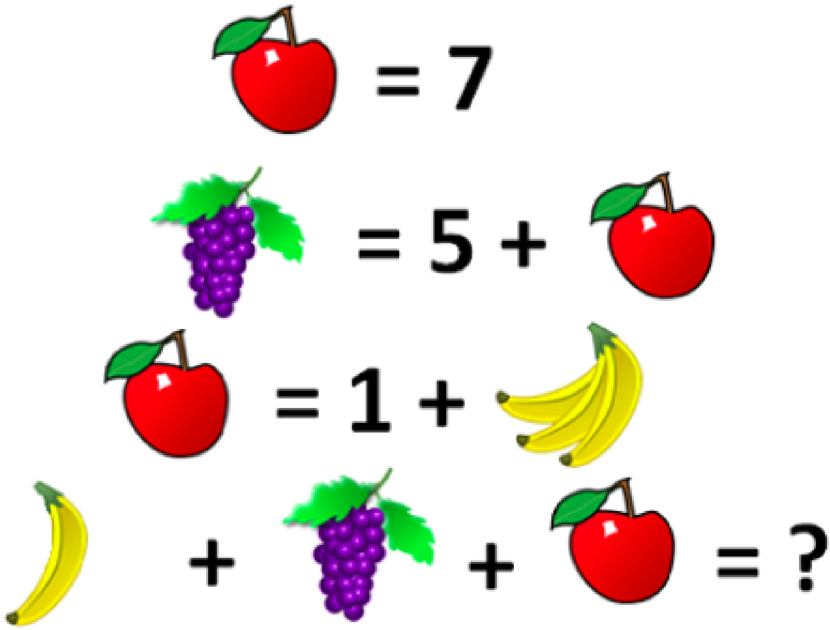
Objectifs

1. Revoir les notions de variable, d' inconnue
2. Tester sur des valeurs numériques une égalité littérale pour appréhender la notion d' équation
3. Utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat général
4. Développer des expressions algébriques dans des cas très simples : a(b+c)=ab+ac
5. Réduire des expressions algébriques
6. Factorisation : ab+ac = a(b+c)
7. Comprendre l'intérêt d'une écriture littérale en produisant et employant des formules liées aux grandeurs mesurables (en mathématiques ou dans d'autres disciplines)

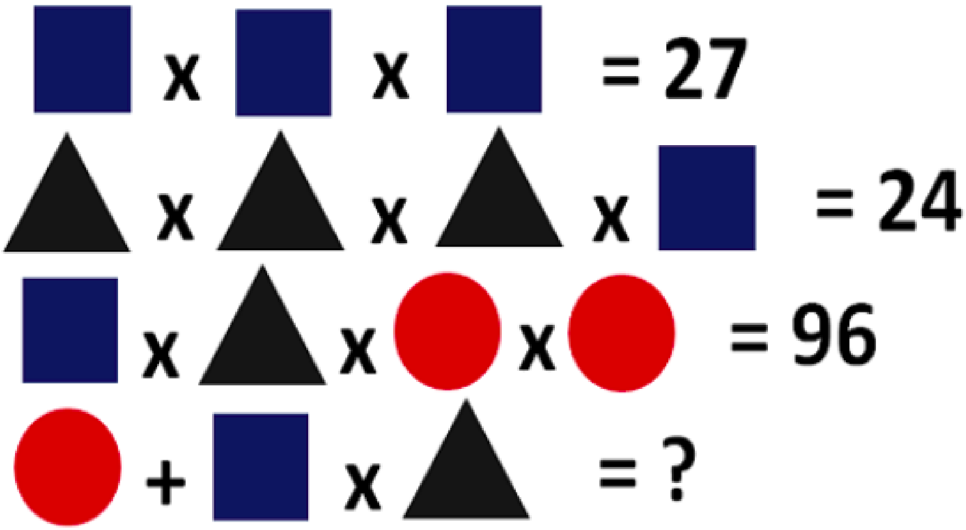
François Viète - Français (1540 ; 1603)

François Viète est né à Fontenay-Le-Comte en Vendée. Il devient avocat au parlement de Paris puis conseiller au parlement de Rennes.
Il se consacre aux mathématiques pour le plaisir qu'il prend comme un loisir. Il est considéré aujourd'hui comme l'un des plus grands mathématiciens de son temps.
Il publie un ouvrage de trigonométrie où il présente de nombreuses formules de cosinus et sinus qui permettent de simplifier les calculs, ainsi que des tables trigonométriques.
Il devient conseiller privé d'Henri IV. Il est chargé de décrypter les messages secrets interceptés que s'envoient les espagnols. Il y arrive systématiquement ce qui provoque l'exaspération de ses ennemis qui finissent par l'accuser de sorcellerie et le dénoncer au pape.
Le calcul littéral trouve ses bases dans le but de résoudre tout problème. La notion d'équations y est longuement développée.
François Viète restera au côté d'Henri IV jusqu'en 1602 pour s'éteindre un an plus tard à Paris.

Résoudre les égalités suivantes :



Résoudre les égalités suivantes :



Échange classe entière :

- Qu'est-ce qu'une expression littérale ?
- Qu'est-ce qu'une variable ?
- Qu'est-ce qu'une inconnue ?
- A quoi ça sert ? Des exemples ?

I. Qu'est-ce qu'une expression littérale ?

A. Définition

Une expression littérale est une expression dans laquelle des nombres (souvent inconnus) ont été remplacés par des lettres.

Si une expression contient plusieurs fois la même lettre, alors elle désigne le même nombre à chaque fois.

Exemple 1

Le périmètre d'un carré de côté 3 cm nous donne : $P=4\times3=12\,cm$

Le périmètre d'un carré de côté x cm nous donne : $P=4\times x$

Exemple 2

J'achète 4 pains au chocolat à 0,80 €, je paye : $S=4\times0{,}80=3{,}20\,€$

J'achète x pains au chocolat à 0,80 €, je paye : $S=x\times0{,}80=0{,}80\times x$

Une expression littérale permet donc de généraliser une situation mathématique.

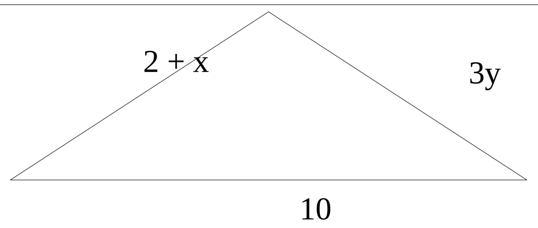
Exemple 3

Exprimer un programme de calcul :

- Choisir un nombre	x
- Ajouter 3	$x+3$
- Multiplier le résultat par 6	$6\times(x+3)$

Exemple 4 :

Généraliser un problème



Le périmètre du triangle est :

$$2+x+3\times y+10=x+3\times y+12$$

B. Simplification d'écriture.

On peut supprimer le signe « $\times$ » entre :

- deux lettres : $a\times b=ab$
- un nombre et une lettre : $2\times b=2b$
- un nombre ou une lettre et une parenthèse : $2\times(x-3)=2(x-3)$
- deux parenthèses : $(x+5)\times(x-3)=(x+5)(x-3)$

P. 100 ex 8

P. 100 ex 2

P. 100 ex 7

P. 106 ex 52

P. 106 ex 53

Vrai ou faux ?

1^{ERE} SÉRIE	2^{E} SÉRIE
a) $x \times 0 = 0$	a) $a \times 2 \times b = a2b$
b) $x \times x = 2x$	b) $3 \times t = 3t$
c) $2 + 2x = 4x$	c) $5 + x = 5x$
d) $x + x = x^2$	d) $\frac{3}{4} \times x = \frac{3x}{4}$
e) $x \times 1 = x$	e) $(5x)^2 = 5x^2$
	f) $-2x + 4x = -6x$

C. Calculer une valeur numérique.

Quand on donne une valeur numérique à ces lettres, on peut calculer la valeur de l'expression littérale.

Exemple :

Calculer l'expression $3a+ab$ pour $a=-2$ et $b=5$.

$3\times(-2)+(-2)\times5$ « On remplace a et b par leurs valeurs respectives »

$=-6-10$ « On effectue les calculs en respectant les opératoires »

$=-16$

P. 100 ex 3

P. 100 ex 4

P. 100 ex 5

P. 103 ex 27

P. 104 ex 33

P. 104 ex 38

P. 105 ex 42

P. 105 ex 43

P. 108 ex 74

Questions classe entière – Notion de développement :

- Comment calculer mentalement 11*7
- Comment calculer mentalement 11*15
- Généralisons
- Comment calculer mentalement 9*12
- Comment calculer mentalement 9*23

- Généralisons

Questions classe entière – Notion de somme/produit :

Répartir si possible les expressions suivantes dans le tableau (x est un nombre quelconque) :

$A = x^2 + 4$ $B = (2x + 3)^2$ $C = 4x^2$ $D = 1 + x^2$ $E = (5x)^2 + 3^2$

CARRÉ D'UNE SOMME	CARRÉ D'UN PRODUIT	SOMME DE CARRÉS	PRODUIT DE DEUX CARRÉS

II. Développer des expressions algébriques.

Définition

Développer un produit, c'est le transformer en une somme ou une différence.

Propriété de la simple distributivité.

k, a et b désignent des nombres :

$$k(a+b)=ka+kb$$
$$k(a-b)=ka-kb$$

Exemples

$$A=5(-2x+4)$$
$$A=5\times(-2x)+5\times4$$
$$A=-10x+20$$

$$B=-x(5x-6)$$
$$B=-x\times5x-x\times(-6)$$
$$B=-5x^2+6x$$

P. 102 ex 15

P. 102 ex 16

P. 102 ex 17

P. 103 ex 27

P. 103 ex 28

P. 103 ex 29

P. 108 ex 71

P. 107 ex 61

P. 107 ex 63

III. Réduire une expression littérale.

A. Réduire un somme.

Définition

Réduire une somme, c'est tout simplement calculer les termes de même nature.

Exemples

$11x+6x=(11+6)x=17x$

$7x^2-3x^2=(7-3)x^2=4x^2$

B. Réduire un produit.

Propriété

Pour simplifier un produit, on peut changer l'ordre des facteurs.

Exemples

$$\begin{aligned}4x\times 2x&=4\times x\times 2\times x\\&=4\times 2\times x\times x\\&=8x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-5(-4x)&=-5\times(-4x)\\&=-5\times(-4)\times x\\&=20x\end{aligned}$$

C. Suppression de parenthèses.

Règles

Lorsque l'on supprime des parenthèses :

- précédées d'un signe +, on conserve les signes :
  $a+(b-c+d)=a+b-c+d$
- précédées d'un signe -, on change les signes :
  $a-(b-c+d)=a-b+c-d$

Exemples

$4x+(11x+5)=4x+11x+5$

$8x+(9-7x)=8x+9-7x$

$6+2x-(5x-7+3x^2)=6+2x-5x+7-3x^2$

D. Réduire une expression littérale.

Dans une expression littérale, on ne peut calculer et simplifier que des membres d'une même famille de nombres.

« $5x^2+3x+(4x-2)-(x^2+1)$ » est une expression littérale.

« x » représente un nombre quelconque. C'est une variable.

On peut la réduire, c'est à dire l'écrire sans parenthèses et avec le moins de termes possibles.

Exemple

	$A=5x^2+3x+4(4x-2)-(x^2+1)$
1- On supprime les parenthèses :	$A=5x^2+3x+16x-8-x^2-1$
2- On regroupe les termes "en x^2 ", les termes "en x " et les "constantes" :	$A=5x^2-x^2+3x+16x-8-1$

3- On factorise les termes "en x^2 ", les termes "en x " et les "constantes" : 4- On réduit :	$A=(5-1)x^2+(3+16)x-8-1$ $A=4x^2+19x-9$
P. 102 ex 20	
P. 102 ex 21	
P. 102 ex 23 (pour les costauds)	
P. 102 ex 24	
Par groupe de 2 élèves : Activité de découverte de la factorisation	

IV. Factorisation : ab+ac = a(b+c)

La factorisation transforme une somme/différence en un produit (c'est l'inverse du développement).

Pour factoriser une expression, il faut trouver un facteur commun.

SOMME, DIFFERENCE		PRODUIT
$ka+kb$	=	$k(a+b)$
$ka-kb$	=	$k(a-b)$

k est le facteur commun.

Exemples :

- Factorisation de $2x+3x^2$

  $2x+3x^2=2\times x+3x\times x$
  $=x(2+3x)$

- Factorisation de $4a-4$

  $4a-4=4\times a-4\times 1$
  $=4(a-1)$

- Factorisation de $25x^2+10x-30x^3$

  $25x^2+10x-30x^3=5x\times 5x+5x\times 2-5x\times 6x^2$
  $=5x(5x+2-6x^2)$

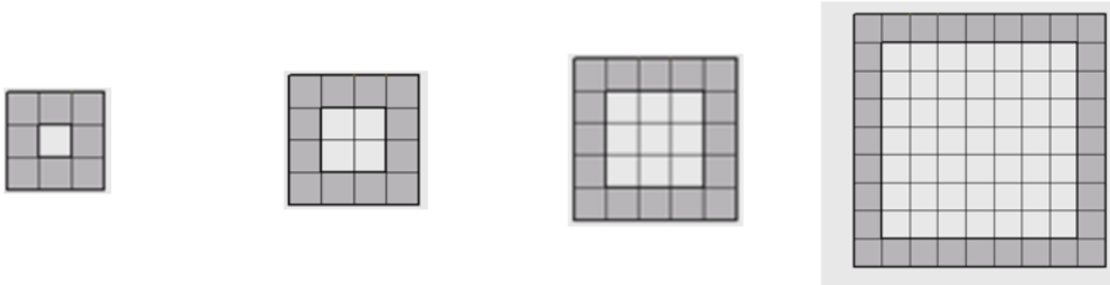
Banque exercices n° 1

Banque exercices n° 2 (pour les rapides)

Banque exercices n° 3 (pour les rapides)

Par groupe de 3 élèves, sur une copie, répondre aux questions suivantes :

Pierre joue avec des carreaux de mosaïque. Il dispose ses carreaux gris autour de différents carrés formés de carreaux blancs. En voici quatre.



Carré Taille 1 **Carré Taille 2** **Carré Taille 3** **Carré Taille 7**

1. Combien y a-t-il de carreaux gris entourant le carré blanc de taille 1 ? Celui de taille 2 ? Celui de taille 3 ?
2. Produire un calcul qui donne le nombre de carreaux gris entourant un carré blanc de taille 7, puis de taille 56.
3. Expliquer par une phrase ou par un programme de calcul comment on peut calculer le nombre de carreaux entourant un carré de n'importe quelle taille.
4. Si on double le côté du carré blanc, double-t-on le nombre de carrés gris de la bordure ? Toujours ? Jamais ? Dans certains cas ? Si oui, lesquels ?
5. Peut-on obtenir des bordures de 100, 150, 200, 250 carreaux ?
6. Etant donné un nombre de carreaux gris, peut-on savoir s'il correspond au nombre exact de carreaux d'une bordure ?

P. 101 ex 14

P. 105 ex 45

P. 106 ex 57

P. 110 ex 83